Bicategorical CoYoneda Lemma

双圏における余米田の補題

RIMS 計算機科学 Gr. M1 平田賢吾

March 26, 2022

Abstract

- 米田の補題は、圏論において最も重要な定理である。
- この米田の補題は、(比較的有名ではないが) 双対的な定理として、余米田の補題 (coYoneda lemma) がある。
- 圏の一般化として、2 圏や bicategory などがある。これらに対しても、米田の補題の類似の定理がある。(bicategorical Yoneda lemma)
- 今回、2 圏に関しても coYoneda lemma が成り立つことを示した。これは、(少なくとも明示的には) 未だどの文献にも示されていない結果である。

自然性の拡張

自然変換とは、射の族 $\{\sigma_A \colon F(A) \to G(A)\}_A$ で、いくつかの条件を満たすものだった。

ここで、対象 A たちは、ある種の “変数” のようなもので、σ_A の domain と codomain に 1 度ずつ現れている。

自然性の拡張

自然変換とは、射の族 $\{\sigma_A \colon F(A) \to G(A)\}_A$ で、いくつかの条件を満たすものだった。

ここで、対象 A たちは、ある種の “変数” のようなもので、σ_A の domain と codomain に 1 度ずつ現れている。

この変数 A が codomain にだけ 2 度現れる射の族 $\{\sigma_A \colon K \to T(A, A)\}_A$ (K は固定された object) や、

自然性の拡張

自然変換とは、射の族 $\{\sigma_A\colon F(A) \to G(A)\}_A$ で、いくつかの条件を満たすものだった。

ここで、対象 A たちは、ある種の "変数" のようなもので、σ_A の domain と codomain に 1 度ずつ現れている。

この変数 A が codomain にだけ 2 度現れる射の族 $\{\sigma_A\colon K \to T(A, A)\}_A$ (K は固定された object) や、
domain にだけ 2 度現れたりする射の族 $\{\sigma_A\colon T(A, A) \to K\}_A$ (K は固定された object) に対しても、ある種の拡張された "自然性" を考えることができる。

拡張された自然性：wedge

Definition (wedge)

関手 $T\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ と $K \in \mathcal{B}$ に対して、K から T への wedge とは、射の族 $\{\sigma_A\colon K \to T(A,A)\}_A$ であって、任意の $f\colon A \to B \in \mathcal{A}$ について次を可換にするもの。

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "\sigma_B"'] & T(A,A) \arrow[d, "T(\mathrm{id},f)"] \\
T(B,B) \arrow[r, "T(f,\mathrm{id})"] & T(A,B)
\end{tikzcd}$$

cowedge $\{\sigma_A\colon T(A,A) \to K\}_A$ は $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ の wedge として定義できる。

wedge の例

Example (自然変換)

自然変換 $\{\sigma_A \colon FA \to GA\}$ は、1 元集合 $\mathbf{1}$ からの写像の族 $\{\mathbf{1} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, GA)\}$ と思うことで、ちょうど wedge になる。

Example (圏の射の合成則)

圏の identity を表す $\{i_A \colon \mathbf{1} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A); * \mapsto \mathrm{id}_A\}$ は、$\mathbf{1}$ から $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$ への wedge。

A と C を固定したとき、圏の射の合成 $\{c_{A,B,C} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C); (g, f) \mapsto g \circ f\}$ は、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ から $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ への cowedge。

自然変換、(co)wedge を総称して extraordinary natural transformation と呼ぶ。

普遍的な wedge としての end の定義

Definition (end)

関手 $T\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して、次のような普遍性を持つ T への wedge $\{\lambda_A\colon \int_A T(A,A) \to T(A,A)\}_A$ を T の end と呼ぶ。($\int_A T(A,A) \in \mathcal{B}$)

任意の T への wedge $\{\sigma_A\colon K \to T(A,A)\}$ に対して、ある射 $u\colon K \to \int_A T(A,A) \in \mathcal{B}$ が一意に存在して、次を可換にする。

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[dr, "\sigma_A"'] & \int_A T(A,A) \arrow[d, "\lambda_A"] \\ & T(A,A) \end{tikzcd} \qquad (\forall A \in \mathcal{A})$$

すなわち、K から $\int_A T(A,A)$ への射と、K から T への wedge が 1 対 1。
end の双対を coend と呼び、$\int^A T(A,A)$ で書く。

自然変換に対する end

特に、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F-, G-)\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ に対する end に関して、次が示せる。

Theorem

$\int_A \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, GA)$ $(\in \mathbf{Set})$ は、F から G への自然変換全体からなる集合である。

自然変換に対する end

特に、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F-, G-) \colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to$ **Set** に対する end に関して、次が示せる。

Theorem

$\int_A \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, GA)$ ($\in$ **Set**) は、F から G への自然変換全体からなる集合である。

Proof.

$\int_A \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, GA)$ の要素と、1 元集合 $\mathbf{1}$ から $\int_A \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, GA)$ への写像は 1 対 1 である。
end の普遍性から、写像 $\mathbf{1} \to \int_A \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, GA)$ と、$\mathbf{1}$ から $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F-, G-)$ への wedge は 1 対 1 である。
wedge $\{\mathbf{1} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, GA)\}_A$ と自然変換 $\{FA \to GA\}_A$ は 1 対 1 である。

$\square$

Yoneda & coYoneda

米田の補題は、関手圏 $[\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ における Hom set $[\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](YC, G)$ と、GC が同型であることだった。

関手圏の Hom set は自然変換全体なのだから、先ほどの定理から end で書き直せて、次のようになる。([S, T] は S から T への写像全体)

$$\int_A [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), GA] \cong GC$$

Yoneda & coYoneda

米田の補題は、関手圏 $[\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ における Hom set $[\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](YC, G)$ と、GC が同型であることだった。

関手圏の Hom set は自然変換全体なのだから、先ほどの定理から end で書き直せて、次のようになる。([S, T] は S から T への写像全体)

$$\int_A [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), GA] \cong GC$$

この双対として、coYoneda lemma は、次の同型で与えられる。

$$\int^A \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \times GA \cong GC$$

- end ・各点 Kan 拡張・重み付き極限は、大いに関係する。(大体等価) (Categories for working mathematician 曰く、全ての概念は Kan 拡張)
- end は計算する上でかなり扱いやすく、便利。
- 特に豊穣圏の理論で、end は重要。
  (関手圏の homset が end で与えられることを先ほど示したが、逆にこれを定義として採用する。)
  coYoneda lemma も、豊穣圏の文脈では Yoneda lemma と同様、息をするように使う。

  豊穣圏の例:
  - 前加法圏とは、Ab-豊穣圏
  - 加法圏とは、直和を持つ Ab-豊穣圏
  - dg 圏とは、chain complex-豊穣圏
  - 距離空間を一般化した Lawvere metric spaces

2 圏

対象 X と対象 Y の間に、射の集合である Hom set $\mathcal{C}(X, Y)$ があるのが圏だった。対象のことを 0-cell、射のことを 1-cell と呼ぶことにする。

対象と対象の間に、1-cell と 2-cell からなる Hom category $\mathcal{C}(X, Y)$ があるのが、2 圏 (2-category) である。

2 圏

対象 X と対象 Y の間に、射の集合である Hom set $\mathcal{C}(X, Y)$ があるのが圏だった。対象のことを 0-cell、射のことを 1-cell と呼ぶことにする。

対象と対象の間に、1-cell と 2-cell からなる Hom category $\mathcal{C}(X, Y)$ があるのが、2 圏 (2-category) である。

Example (2 圏)

圏と関手と自然変換は、2 圏 **Cat** をなす。Hom category **Cat**$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は関手圏を指す。前加方圏全体、dg 圏全体なども同様に 2 圏をなす。

図式で書くときは、2-cell は自然変換と同様、$\Rightarrow$ で書く。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow_{\alpha}"] & B \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

bicategory

2 圏は普通の圏の時と同様、1-cell の結合律 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ や単位律 $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$ などが要求されるが、これを弱めたものが、bicategory である。

すなわち、同型な 2-cell

$$
\begin{aligned}
l_f &: 1 \circ f \Rightarrow f \\
r_f &: f \circ 1 \Rightarrow f \\
a_{hgf} &: (h \circ g) \circ f \Rightarrow h \circ (g \circ f)
\end{aligned}
$$

などが、1-cell 間の等号の代わりに用いられる。(同型であることしか要求しない)

2 圏は bicategory であるが、bicategory は 2 圏であるとは限らない。

bicategory の例

Example (Bimod)

0-cell が環、1-cell $M\colon R \to S$ は R-S-両側加群、2-cell は両側加群の準同型とする bicategory Bimod が定義できる。合成 $M \otimes_S N$ は、coequalizer

$$M \otimes S \otimes N \overset{\rho \otimes N}{\underset{M \otimes \lambda}{\rightrightarrows}} M \otimes N \longrightarrow M \otimes_S N$$

で定義される。

Example (Par)

集合、部分関数、部分関数の包含関係によって、bicategory が定められる。

Bicategory の間の関手 (pseudo functor)

1-cell の合成に関して equality よりも弱い概念を考えている。bicategory 間に考えるべき自然な関手も、次の意味で緩く合成を保つべき。

$$F(g) \circ F(f) \cong F(g \circ f)$$

これは pseudo functor というものとして定義される。

Bicategory の間の関手 (pseudo functor)

1-cell の合成に関して equality よりも弱い概念を考えている。bicategory 間に考えるべき自然な関手も、次の意味で緩く合成を保つべき。

$$F(g) \circ F(f) \cong F(g \circ f)$$

これは pseudo functor というものとして定義される。

自然変換も同様に、upto-iso で議論されるべき。(α_f は同型)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F(A)} \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & \mathrm{G(A)} \arrow[d, "G(f)"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow \alpha_f"] \\
\mathrm{F(B)} \arrow[r, "\alpha_B"'] & \mathrm{G(A)}
\end{tikzcd}$$

これも同様に、pseudo transformation という名前がついている。

bicategorical Yoneda lemma

bicategory でも米田の補題の類似が成り立つことが知られている。

Lemma (Bicategorical Yoneda lemma)

$\mathcal{C}$ を *bicategory* とする。次の圏同値がある。

$$[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Cat}](YC, G) \simeq GC$$

*(*関手圏 $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Cat}]$ は *pseudo functor* と *pseudo transformation* と *modification* からなる*)*