$\mathbb{Z}$ 作用を持つ解析的無限型 Riemann 面の Teichmüller 空間の測地線の構成

松田　凌

京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻 数学専攻 M2
matsuda.ryou.82c at st.kyoto-u.ac.jp

2022 年 3 月 26 日

@ Yota25.

あらすじ

Riemann 面の変形空間である Teichmüller 空間は, 構成から自然に Teichmüller 距離という完備な距離函数を持つ．有限次元 Teichmüller 空間は, この距離に関する測地線は一意的に存在することが知られているが, 無限次元の場合には, 一意性が成立しない 2 点の組が存在することが知られている ([L1], [Th], [L2]).
測地線を構成するために重要になってくるのは, 極値 Beltrami 微分である．本論文では, $\mathbb{Z}$ 作用を持つ解析的無限型 Riemann 面の極値 Beltrami 微分であるための十分条件 (主結果 1) を述べる．そのあと, $\mathbb{Z}$ 作用を持つ解析的無限型 Riemann 面の Teichmüller 空間において, 今まで知られていなかった測地線の構成方法 (主結果 2, 主結果 3, 主結果 4) について述べる.

Def 1.1 (平面上の擬等角写像)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ を向きを保つ中への同相写像とする. このとき, f が次の条件 :

1. L^2_{loc} に弱偏導関数を持ち,
2. $\exists k \in [0,1)$ s.t. $|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|$ *a.e.*

を満たすとき, $K := \frac{1+k}{1-k}$ として, K-擬等角写像 (*K-qc*) という. K を f の最大歪曲度といい, $K(f)$ と書く.

Proposition 1.1

平面上の擬等角写像は次を満たす.

1. *1-qc* は等角写像
2. $\{z \mid f_z = 0\}$ は, 零集合.
3. 領域上の *qc* は局所一様 *Hölder* 連続性を満たす *(*森の定理*)*.

Corollary 1.2 (([A], Chapter III, C, Theorem 2))

$K > 1$ を一つ固定する. 次の族：$\{f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \mid f$ は, K-*qc*, $f(0) = 0\}$ は正規族. 特に点列コンパクト.

K-qc：f に対して, $\mu_f := \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$ は, 可測, $\|\mu_f\|_\infty \leq k := \frac{K-1}{K+1} < 1$ かつ,

$$f_{\bar{z}} = \mu_f f_z$$

なる PDE を満たす. μ_f を f の Beltrami 係数という. これについて, 次が知られている.

Theorem 1.3 (Measurable Riemann mapping Theorem)

$\mathbb{C}$ 上の任意の可測写像 μ で, $\|\mu\|_\infty < 1$ を満たすものに対して, μ を *Beltrami* 係数にもつ $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への擬等角写像が存在する. 特に, $0, 1$ (自動的に ∞ も) を固定するという条件で一意的に決まる.

以後では, Riemann 面の間の擬等角写像を用いる. Riemann 面 R_1, R_2 の間の同相写像 $f : R_1 \to R_2$ が擬等角写像であるとは, 局所座標を介す擬等角写像であって, R_1 上全体で一様に歪曲度が抑えられているときをいう.

R を双曲型 Riemann 面, 普遍被覆を $\mathbb{H}$ とし, その Fuchs 群を Γ とする.

$$L^\infty(\Gamma) := \left\{ \mu \in L^\infty(\mathbb{H}) \middle| \mu(Az)\frac{\overline{A'z}}{A'z} = \mu(z)\ (\forall A \in \Gamma) \right\}$$

$$A(\Gamma) := \left\{ \varphi \mid \varphi \text{ は}, \mathbb{H} \text{ 上の } \Gamma \text{ に関する正則二次微分}, \ \|\varphi\|_{A(\Gamma)} := \iint_{\mathbb{H}/\Gamma} |\varphi|\, dxdy < \infty \right\}$$

$\varphi \circ A \cdot (A')^2 = \varphi$.

とおく. また, $\mathrm{Bel}(\Gamma) := \{\mu \in L^\infty(\Gamma) \mid \|\mu\|_\infty < 1\}$ とおく. 各 $\mu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ に対して, Beltrami 方程式の標準解である $\mathbb{H}$ の自己擬等角写像で $0, 1, \infty$ を固定するものを w_μ と書くこととする.

Def 2.1

$\mu, \nu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ が *Circle - equivalent* であるとは,

$$w_\mu = w_\nu \quad \textit{on } \hat{\mathbb{R}}$$

と定め, $\mathrm{Teich}(\Gamma) := \mathrm{Bel}(\Gamma)/$*Circle − equivalence* と定める.

$R \cong \mathbb{H}/\Gamma$

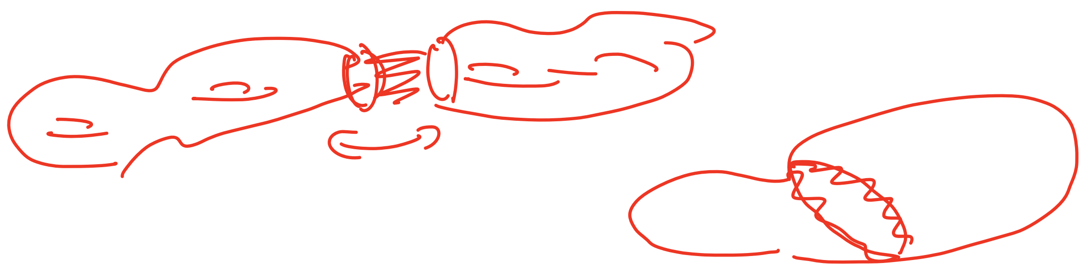
$w_\mu \circ \Gamma \circ w_\mu^{-1} \circlearrowright \mathbb{H}.$

Rem

上の Teich(Γ) は次の方法で, Riemann 面の変形と見做せる：$\mu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ に対して,

$$\Gamma^\mu := w_\mu \circ \Gamma \circ w_\mu^{-1} \subset PSL(2;\mathbb{R})$$

を満たす．よって, Γ^μ は $\mathbb{H}$ に不連続に再び作用するから, $R^\mu := \mathbb{H}/\Gamma^\mu$ は再び Riemann 面になる．また, w_μ が誘導する写像 $R \to R^\mu$ が存在する．この見方によって, Teichmüller 空間は, Riemann 面の変形空間と見做せる．



Def 2.2 (Teichmüller 距離)

Teich(Γ) 上に,

$$d_T([\mu],[\nu]) := \frac{1}{2} \inf \log K(w_{\tilde{\mu}} \circ w_{\tilde{\nu}}^{-1})$$

とおく. ここに, inf は $\tilde{\mu} \in [\mu]$, $\tilde{\nu} \in [\nu]$ 全体でとる.

Theorem 2.1 ([G], 5.3)

d_T は Teich(Γ) 上で完備な距離である.

Theorem 2.2

Teich(Γ) は複素構造を持つ. つまり, 複素多様体である.

Def 2.3 (極値的 Beltrami 係数)

$\mu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ が極値的であるとは,

$$\forall \nu \in [\mu] \text{ に対して, } \|\mu\|_\infty \leq \|\nu\|_\infty$$

を満たすことをいう. また, 極値的な元が同値類の中に一つしか存在しないとき, 一意極値的であるという.

Rem

μ が極値的なとき. $d_T([0], [\mu]) = \frac{1}{2} \log \frac{1+\|\mu\|_\infty}{1-\|\mu\|_\infty}$ で与えられる.

Rem

任意の $[\mu] \in \mathrm{Teich}(\Gamma)$ は, 極値的な元を持つ. $\nu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ に対して,

$$\{\mu \in [\nu] \mid w_\mu = w_\nu \ \text{ on } \ \hat{\mathbb{R}} \quad \|\mu\|_\infty \leq \|\nu\|_\infty\}$$

を考えると, 正規族になる. よって, ノルムが最小になる元が取れる.

Theorem 2.3 (The Hamilton–Krushkal condition)

$L^\infty \supset \mathrm{Bel}(\Gamma)$

$\wr$

L^1

$\mu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ が極値的であるための必要十分条件は,

$$\|\mu\|_\infty = \sup\left\{ \mathrm{Re} \iint_{\mathbb{H}/\Gamma} \mu\varphi \; dxdy \,\middle|\, \varphi \in A(\Gamma) \text{ かつ } \|\varphi\|_{A(\Gamma)} = 1 \right\}$$

$\frac{d\bar{z}}{dz} \cdot (dz)^2 = d\bar{z} \wedge dz$

である. ただし, $A_1(\Gamma) := \{\varphi \in A(\Gamma) \mid \|\varphi\|_{A(\Gamma)} = 1\}$

Rem

μ を極値 Beltrami 係数とする. このとき, $[0,1] \ni t \mapsto [t\mu] \in \mathrm{Teich}(\Gamma)$ は Teichmüller 距離に関して測地線を与える.

上の定理から, 極値 Beltrami 係数に対して, ある $A_1(\Gamma)$ 上の列 (φ_n) で,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re} \iint_\omega \mu\varphi_n \; dxdy = \|\mu\|_\infty$$

を満たすものが存在する. これを, μ の Hamilton 列という.

1. 平面擬等角写像
2. Teichmüller Theory
3. 主結果

$R = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$

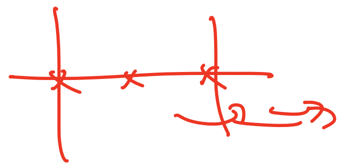
$z \mapsto z+1$

Theorem 3.1 (主結果 1)

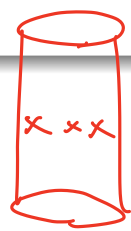
$R := \mathbb{H}/\Gamma$ を解析的無限型 *Riemann* 面とし, 無限巡回群 $\langle\gamma\rangle$ が不連続に作用しているとする. $\mu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ に対して, 次が成立するならば, 極値的である : ある $\varphi \in A(R/\langle\gamma\rangle)$ と $k \in [0,1)$ が存在し,

$z \mapsto z+3$

$$(\mu|_{\omega_n}) \circ \gamma_n \frac{\overline{\gamma_n'}}{\gamma_n'} \xrightarrow{n\to\infty} k\frac{|\varphi|}{\varphi} \quad (a.e.\omega_0)$$



ただし, $\gamma_n := \gamma^n$, 基本領域 ω_0, $\omega_n := \gamma_n(\omega_0)$ とした.



被覆 $p : \tilde{R} \to R$, 被覆変換群 Γ, $F \in A(\tilde{R})$ とする. このとき,

$$\Theta(F) := \sum_{B\in\Gamma} (F \circ B \cdot B'^2)$$

を, Poincaré 級数という. これは, 広義一様に絶対収束し, Γ の基本領域上 L^1 収束する. また, $\Theta(F) \in A(R)$ かつ, 全射.

proof

$K(k) := [-k, k^2] \cap \mathbb{Z}, K^-(k) := [-k^2, k] \cap \mathbb{Z}$, $J_{jk} = j + K^-(k)$ とおく. 射影 :$p : R \to R/\langle\gamma\rangle$ が被覆写像である. そこで, $\tilde{\varphi} = p^*(\varphi)$ とおく. また, Poincaré 級数の全射性から, ある $f \in A(R)$ が存在して, $\tilde{\varphi} = \Theta(f)$ が成り立つ. そこで,

$$F_k := \sum_{n \in K^-(k)} f \circ \gamma_n \cdot (\gamma_n')^2$$

とし,

$$\varphi_k := \|F_k\|_R^{-1} F_k$$

が, μ に対する Hamilton 列であることを示せば良い. このとき,

$$\frac{\|F_k\|_R}{\#K^-(k)} \xrightarrow{k \to \infty} 1$$

であることが重要である.

Teichmüller 空間の多様体としての構造

次の空間を定義する.

$$N(\Gamma) := \left\{ \mu \in L^\infty(\Gamma) \middle| \iint_{\mathbb{H}/\Gamma} \mu\varphi \; dxdy = 0 (\forall \varphi \in A(\Gamma)) \right\}$$

を無限小 Trivial Beltrami 微分の成す空間という.

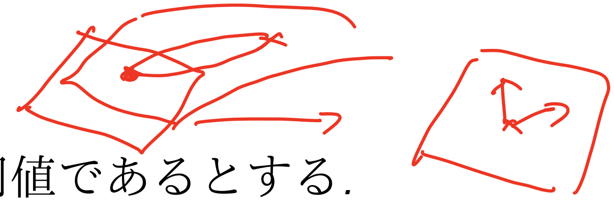
Def 3.1 (infinitesimal な Trivial Beltrami 微分)

二つの *Beltrami* 微分 $\mu_1, \mu_2 \in L^\infty(\Gamma)$ に対して, 任意の $\varphi \in A(\Gamma)$ に対して,

$$\int_{\mathbb{H}/\Gamma} (\mu_1 - \mu_2)\varphi = 0$$

を満たすとき, *infinitesimal* に *Teichmüller* 同値であるという. 以下では単に *infinitesimal* に同値という.

$L^\infty(\Gamma)/N(\Gamma)$ は, Teichmüller 空間の原点における接空間に一致する. 特に, 次の定理が成り立つ.



Theorem 3.2 (Li ([L2], 3, Theorem 3.3))

極値的 *Beltrami* 係数 μ_1, μ_2 は *Teichmüller* 同値であるとする.
$\mu_1 - \mu_2 \notin N(\Gamma)$ ならば, $\gamma_j : [0,1] \ni t \mapsto [t\mu_j]$ $(j = 1, 2)$ は $[0], [\mu]$ を結ぶ異なる測地線である.

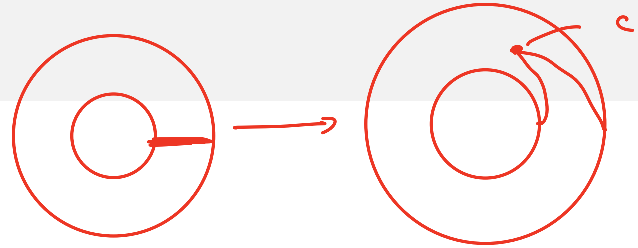
つまり, 同じ 2 点を結ぶ測地線が異なるための十分条件として, 初速度が異なっていれば良い.
今までの考察から, 次のような極値的 Beltrami 係数の族 $\{\mu_c\}$ で次を満たすものを構成すれば良い：

$[\mu_{c_1}] = [\mu_{c_2}]$

1. c_1, c_2 に対して, μ_{c_1} と μ_{c_2} は Teichmüller 同値
2. $c_1 \neq c_2$ ならば μ_{c_1} と μ_{c_2} は infinitesimal に同値でない.

特に, $\mu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ を一つ固定し, 領域 $U \subset \mathbb{H}/\Gamma$ 上でのみ値を変更することで, これを実現する.

測地線の構成



Proposition 3.3

$\mathrm{Bel}(\mathbb{A}_{1/e,1})$ の族で, 次を満たすものが存在する :
$D := \{|\mathrm{Im}z| < 1, \mathrm{Re}z \geq 0\}$ で径数づけられた *Beltrami* 係数の族 $\{\nu_c \mid c \in D\}$ が存在して,

1. c に対して, ν_c は 0 と *Teichmüller* 同値
2. $c_1 \neq c_2$ ならば ν_{c_1} と ν_{c_2} は *infinitesimal* に同値でない.
3. ν_c は c に複素解析的に依存する L^∞-norm.
4. $c \in \mathbb{R}$ ならば $|\nu_c|$ は定数.

proof

$c \in D$ とする. このとき次の擬等角写像の Beltrami 係数を見れば良い.

$$f_c(z) = \begin{cases} e^{ic(-\log(|z|))} & \frac{1}{e} < |z| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} \\ e^{-ic} \cdot e^{ic\log(|z|)} & \frac{1}{\sqrt{e}} \leq |z| < 1. \end{cases}$$

Theorem 3.4（主結果 2）

$\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ の族で, 次を満たすものが存在する : $D := \{|\mathrm{Im} z| < 1, \mathrm{Re} z \geq 0\}$ で径数づけられた *Beltrami* 係数の族 $\{\nu_c \mid c \in D\}$ が存在して,

1. c に対して, ν_c は 0 に *Teichmüller* 同値
2. $c_1 \neq c_2$ ならば ν_{c_1} と ν_{c_2} が *infinitesimal* に同値でない.
3. ν_c は c に複素解析的に依存する
4. $c \in \mathbb{R}$ ならば $|\nu_c|$ は定数.

上で構成した例と合わせて, $U \subset R := \mathbb{H}/\Gamma$ を 単位円盤か穴あき円盤か円環領域に等角同型で境界は滑らかな領域とする. このとき, 上で得た Beltrami 係数の族を次の方法で拡張することで結果をうる :

$$\iota : \mathrm{Teich}(U) \ni [\nu] \mapsto \left[\begin{cases} \nu & \text{on } U \\ \mu & \text{on } R \setminus U \end{cases}\right] \in \mathrm{Teich}_{\mathrm{Cl}(U)}(R)$$

ただし, μ は $R \setminus U$ 上で $|\mu|$ が定値な極値的 Beltrami 係数.

Theorem 3.5（主結果 3） $\bar{R} = \hat{\mathbb{C}}$. $R := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

$\bar{R}$ を *Riemann* 面とし, $\alpha \in \bar{R}$ に収束する点列 $\{a_n\}$ を一つ固定する．このとき, $R := \bar{R} \setminus (\{a_n\} \cup \{\alpha\})$ とする．
R に対して, ある無限巡回群 $\langle \gamma \rangle$ が不連続に作用しているとき．R 上の *Beltrami* 係数 μ で次を満たすものが存在する：

1. μ は極値的
2. $|\mu|$ は定数
3. ある極値的 *Beltrami* 係数の族 $\{\mu_c \mid c \in I \subset D\}$ が存在して,
    1. μ を含む
    2. 含まれる *Beltrami* 係数は *Teichmüller* 同値
    3. μ_c は c に複素解析的に依存する
    4. $c_1 \neq c_2$ ならば μ_{c_1} と μ_{c_2} は *infinitesimal* に *Teichmüller* 同値でない
    5. ある $U \subset R$ が存在して $\mu_c|_{R \setminus U} = \mu|_{R \setminus U}$, $\mathrm{Cl}(U) \cap \{a_n\} \neq \emptyset$

U は $\mathbb{D}$ または $\mathbb{D}^*$ または 円環領域 $\mathbb{A}$ と等角同型にできる．

例えば, $R := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

Theorem 3.6 (主結果 4)

$\bar{R}$ を *Riemann* 面とし, $\alpha \in \bar{R}$ に収束する点列 $\{a_n\}$ を一つ固定する．このとき, $R := \bar{R} \setminus (\{a_n\} \cup \{\alpha\})$ とする．R に対して, $\mathbb{Z}$ が不連続に作用しているとき．R 上の *Beltrami* 係数 μ で次を満たすものが存在する :

1. μ は極値的
2. $|\mu|$ は定数
3. $[0]$ と $[\mu]$ を結ぶある測地線の非自明な族 $\{\lambda_c \mid c \in I \subset D\}$ が存在して, λ_c は c に複素解析的に依存する.

Rem

次が知られている ([L1], Theorem 3 / [EKK], 8, Theorem 6) :
$\mu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ を極値的 かつ $\mu \neq 0$ とする．次は同値 :

1. μ が一意極値的かつ $|\mu| = \|\mu\|_\infty$ (a.e.)
2. $[0]$ と $[\mu]$ を結ぶ測地線がただ一つ存在する.

ただし, "一意極値的ならば測地線は一意的" については反例がある.
([BLMM], Theorem 10)

$l^\infty \supset \Omega$

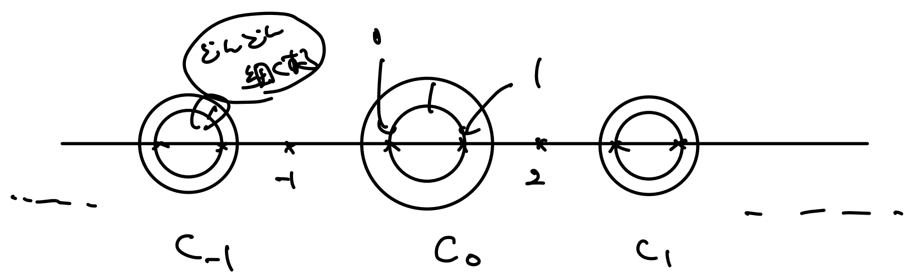
特に, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に限ると, 次のような測地線の族が構成できる.

Theorem 3.7

$l^\infty := \{ a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \mid \sup_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| < \infty \}.$

$\Omega := \{(c_j) \in l^\infty \mid c_j \in I\}$ とおく.

1. μ は極値的
2. $|\mu|$ は定数
3. $[0]$ と $[\mu]$ を結ぶある測地線の非自明な族 $\{\lambda_{(c_j)} \mid (c_j) \in \Omega\}$ が存在して, λ_{c_j} は (c_j) に (l^∞ の意味で) 複素解析的に依存する.



[A] Lars V. Ahlfors with appendix by C.J.Earle, I.Kra, M. Shishikura and J.H. Hubbard : “Lectures on Quasiconformal Mappings” Second Edition（American Mathematical Society, 2006）

[BLMM] V. Bozin, N. Lakic, V. Markovic, M. Mateljevic, Unique extremality, J. Anal. Math., **75** (1998), 299-338

[EKK] C. Earle,I. Kra and S. Krushkal, Holomorphic motions and Teichmüller spaces, Transactions of the American Mathematical Society,**343** (1994), 927–948.

[G] Frederick. P. Gardiner, Teichmüller Theory and quadratic differentials John Wiley and Sons, 1987

[Kr] I. Kra. On Nielsen-Thurston-Bers type of some self-maps of Riemann surfaces, Acta Math., **146** (1981), 231-270

[L1] Li Zhong, Nonuniqueness of geodesics in infinite dimensional Teichmüller spaces(I), Complex Variables Theory Appl. **16** (1991), 261-272.

[L2] Li Zhong, Nonuniqueness of geodesics in infinite dimensional Teichmüller spaces(II), Ann Acad sci fenn ser a1 math. **18** (1993), 355-367.

[Mc] C. McMullen Amenability, Poincaré series and quasiconformal maps, Invent. math. **97** (1989), 95-127.

[O] H. Ohtake Lifts of extremal quasiconformal mappings of arbitrary Riemann surfaces, J. Math. Kyoto Univ. **22** (1982), 191-200.

[S] K. Strebel, On the existence of extremal Teichmüller mappings, J.Anal. Math, **30**, 441–447(1976)

[Th] H. Tanigawa, Holomorphic families of geodesic discs in infinite dimensional Teichmüller spaces, Nagoya Math. J. **127** (1992), 117-128.

[Tm] M. Taniguchi, On the rigidity of an infinite Riemann surface, Complex Variables, **14**(1990), 161-167.

Teichmüller 空間の構成 (質疑応答用)

R, R_j を双曲型 Riemann 面とし, $f_j : R \to R_j$ を擬等角写像とする ($j = 1, 2$). 組 (R_1, f_1), (R_2, f_2) が Teichmüller 同値であるとは, ある等角写像 $c : R_1 \to R_2$ が存在して, $c \circ f_1$ と f_2 が R の理想境界を固定して Homotop であることを言う.
R から得られる組全体を Teichmüller 同値で割った空間を Teichmüller 空間 $T(R)$ という. 構成より次の距離を持つ.

$$d_T([S_1, f_1], [S_2, f_2]) := \frac{1}{2} \inf \log K(\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1^{-1})$$

ここに, $\tilde{f}_j$ は, (S_j, f_j) と $(S_j, \tilde{f}_j)$ が同値な範囲で $\inf$ をとる. この距離を, Teichmüller 距離という.
また, R から R への自己擬等角写像であって, id_R と Teichmüller 同値なものの全体を $D_0(R)$ とかく.

R 上定義された擬等角写像の Beltrami 係数を局所座標ごとにをとると，次の空間を得る．

Def 3.2

R の局所座標 (U,z) 毎に定義された可測関数 μ^z の族 $\mu=\{\mu^z\}_{(U,z)}$ であって，次の 2 条件：

$$\mu^z\frac{d\bar{z}}{dz}=\mu^\zeta\frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta},\quad \|\mu\|_\infty:=\operatorname{ess\,sup}_{\substack{\text{局所座標 }(U,z)\\ p\in U}}|\mu^z(p)|$$

を満たすもの全体を $L_\infty(R)$ と書くこととする．ただし，z,ζ は局所座標である．また，$\mathrm{Bel}(R):=\{\mu\in L_\infty(R)\mid\|\mu\|_\infty<1\}$ とおく．

$D_0(R,\sigma)$ の $\mathrm{Bel}(R)$ への作用を以下で定める．

$$D_0(R,\sigma)\times\mathrm{Bel}(R)\ni(h,\mu)\mapsto h^*(\mu)=\frac{(f^\mu\circ h)_{\bar{z}}}{(f^\mu\circ h)_z}\in\mathrm{Bel}(R)$$

Def 3.3

群作用による軌道空間を $\mathrm{Teich}_1(R)$ とおく．つまり，$\mu, \nu \in \mathrm{Bel}(R)$ が同値であることを，ある $h \in D_0(R)$ が存在して，$h^*(\mu) = \nu$ を満たすことで定義し，$\mu \sim_{D_0(R)} \nu$ と書くことにする．また，$0 \in \mathrm{Bel}(R)$ の軌道を $\mathrm{Bel}_0(R)$ と書くことする．また，その元を *trivial* な *Beltrami* 係数ということにする．

Proposition 3.8 ([G], 5.1, Propotition 1)

$\mathrm{Teich}(R), \mathrm{Teich}_1(R)$ 自然に同一視できる．

Proposition 3.9 ([G], 5.2, Lemma 2)

$\mathrm{Teich}(\Gamma) := \mathrm{Bel}(\Gamma)/$*Circle – equivalence* と定めると，$\mathrm{Teich}(\Gamma)$ と $\mathrm{Teich}(R)$ は自然に同一視できる．

Teichmüller 空間の多様体構造 (質疑応答用)

Def 3.4

$$B(\Gamma) := \left\{\varphi \middle| \mathbb{H}^* \text{ 上の } \Gamma \text{ に関する正則二次微分 } \|\varphi\|_{B(\Gamma)} < \infty\right\}$$

とおく．ただし, $\mathbb{H}^*$ 上の *Poincaré* 計量を $\rho := \frac{|dz|}{|2y|}$, $\|\varphi\|_{B(\Gamma)} := \left\|\rho^{-2}\varphi\right\|_\infty$.

Theorem 3.10 (Bers embedding ([G], 5.6, Theorem 4))

Γ を *Fuchs* 群とする．このとき, $\mathcal{B} : T(\Gamma) \ni [\mu] \mapsto \{w^\mu, z\} \in B(\Gamma)$ は一対一正則写像であって, $\Delta_{B(\Gamma)}(0;2) \subset \mathcal{B}(T(\Gamma)) \subset \mathrm{Cl}(\Delta_{B(\Gamma)}(0;6))$ であり, 像の上への双正則同型である．(ただし, $\{f,z\} := \frac{f'''}{f'}(z) - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}(z)\right)^2$.)

Proposition 3.11 (Teichmüller の定理)

上の写像を介して *Teichmüller* 空間を実現すると, $L^\infty(\Gamma)/N(\Gamma)$ は原点における接空間 $T_{[0]}(\mathrm{Teich}(\Gamma))$ に同一視される．

今後の展望 1(質疑応答用)

$$\begin{tikzcd}
\text{[O] の無限巡回群での結果 Lemma 2} \arrow[r, "\text{重みづけ}"] \arrow[d, "\text{被覆変換群の一般化}"] & \text{主結果 1} \arrow[d, "\text{被覆変換群の一般化}"] \\
\text{[O] の有限生成 Able 群での結果，Theorem1'} \arrow[r, "\text{重みづけ}"] \arrow[d, "\text{被覆変換群の一般化}"] & ??? \arrow[d, "\text{被覆変換群の一般化}"] \\
\text{[Mc] の Amenable な群での結果} \arrow[r, "\text{重みづけ}"] & ??????
\end{tikzcd}$$